TEZĂ DE ABILITARE

CONTRIBUŢII LA TEORIA SISTEMELOR ITERATIVE DE FUNCŢII

Radu MICULESCU

Specializarea: Matematică

Universitatea din Bucureşti

Bucureşti 2014

Rezumat

În această teză voi prezenta rezultatele obţinute privind sistemele iterative de funcţii.

Teoria fractalilor, prin puterea sa de a modela structuri extrem de complicate, este o extensie a geometriei clasice. Unele obiecte exotice, precum mulţimea triadică a lui Cantor, curba lui Koch şi graficul funcţiei lui Weierstrass, care depăşesc sfera imaginaţiei obişnuite, au produs, la apariţia lor, un impact major asupa comunităţii matematice. B. Mandelbrot, cel care a sesizat unele trăsături comune ale unor astfel de obiecte matematice şi a observat că anumite fenomene din lumea înconjurătoare pot fi descrise cu ajutorul lor, este considerat a fi fondatorul teoriei fractalilor. O noua etapă în dezvoltarea acestei teorii a început odată cu generarea imaginii unei mulţimi fractale cu ajutorul calculatorului. Imediat după aceea inginerii, fizicienii, economiştii şi biologii şi-au îndreptat atenţia către acest domeniu.

Unul dintre cele mai răspândite moduri de a genera mulţimi fractale este dat de teoria sistemelor iterative de funcţii care a fost întemeiată de J. Hutchinson (vezi şi cercetările lui P. Moran în această direcţie) în articolul intitulat *Fractals and self similarity* publicat în revista Indiana University Mathematics Journal, în 1981, unde se introduce şi studiază noţiunea de auto-similaritate. O mulţime A se numeşte auto-similară dacă este constituită dintr-o familie finită de copii ale sale. Mai precis, dat un spaţiu metric complet (X, d) şi o familie finită de contracţii $f_1, f_2, ..., f_n : X \to X$, unica submulţime nevidă şi compactă A a lui X cu proprietatea că $A = \underset{i=1}{\overset{n}{\cup}} f_i(A)$ se numeşte mulţime fractală auto-similară (sau atractorul sistemului iterativ de funcţii $((X, d), \{f_i\}_{i\in\{1,2,...,n\}})$. Acest concept, care a cunoscut o largă răspândire, mai ales datorită cărţii *Fractals everywhere,* al cărei autor este Michael Barnsley, a căpătat o mare însemnătate în cadrul studiului fractalilor.

Orice submulţime compactă a lui X se poate aproxima cu atractori de sisteme iterative de funcţii. Problema determinării acelor mulţimi compacte care sunt atractori de sisteme iterative de funcţii este mult mai subtilă deoarece aceştia pot lua uimitor de multe forme. O listă de exemple poate începe cu obiecte simple precum un interval, un pătrat, un disc şi poate continua cu mulţimi exotice precum mulţimea triadică a lui Cantor, triunghiul lui Sierpinski, buretele lui Menger, feriga lui Barnsley, fractalul lui Castle, mulţimile Julia, curba lui Koch, lui Polya, lui Levy sau graficul lui Takagi. Este natural să ne întrebăm dacă orice submulţime compactă a

lui X este atractorul unui sistem iterativ de funcţii. Răspunsul este negativ. De exemplu, L. Stacho şi L. Szabo au construit o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$ care nu este atractorul nici unui sistem iterativ de funcţii.

Mulţimile auto-similare se pot găsi aproape peste tot în univers (ca de exemplu: galaxiile, norii, fiordurile, culturile de bacterii, plantele, compresia datelor). Ca urmare a diverselor aplicaţii ale sistemelor iterative de funcţii apărute în ultimii ani, există actualmente un interes crescut pentru extinderea cadrului clasic al lui Hutchinson pentru generarea mulţimilor auto-similare, fie prin considerarea unor contracţii generalizate, fie prin considerarea unui număr infinit de contracţii.

După obţinerea, în 1999, a titlului de doctor în Matematică, preocupările mele ştiinţifice s-au îndreptat către teoria sistemelor iterative de funcţii. Scopul acestei teze este de a prezenta rezultatele pe care le-am obţinut în această direcţie. Acestea se pot grupa în două tematici pricipale, anume *contribuţii la teoria sistemelor iterative finite de funcţii* (cărora le sunt dedicate primele trei capitole) şi *contribuţii la teoria sistemelor iterative infinite de funcţii* (cărora le sunt dedicate următoarele două capitole), care vor fi prezentate detaliat în continuare. Un mod alternativ de generare a mulţimilor fractale este cel iniţiat de Gaston Julia şi Pierre Fatou care au studiat iteratele funcţiilor raţionale pe sfera lui Riemann. Acestă lucrare nu este dedicată studiului unor astfel de obiecte.

Capitolul I este dedicat contribuţiilor autorului tezei la teoria clasică a sistemelor (finite) iterative de funcţii.

În *Secţiunea I.2* amintim definiţiile şi unele fapte bine cunoscute din teoria sistemelor iterative de funcţii (notate, prescurtat, cu IFS).

În *Secţiunea I.3* stabilim o legătură între teoria operatorilor compacţi şi teoria sistemelor iterative de funcţii. Pentru început prezentăm o familie de IFS al căror atractor nu este conex, pentru ca apoi, în contrast cu caracterizările cunoscute ale operatorilor compacţi care sunt limitate la cadrul analizei funcţionale, să prezentăm o astfel de caracterizare prin intermeiul neconexităţii atractorilor unei familii de IFS construită cu ajutorul operatorului considerat.

În *Secţiunea I.4* prezentăm un rezultat de aproximare privind fractalii generaţi de sisteme iterative de funcţii pe spaţiul infinit dimensional al funcţiilor continue pe un interval compact. Mai precis, aproximăm un astfel de fractal cu o mulţime finită pentru care descriem o proiecţie 2 dimensională a sa cu scopul reprezentării grafice a acesteia.

Capitolul II este consacrat contribuţiilor autorului tezei privind generalizările sistemelor finite iterative de funcţii.

Dat un spaţiu metric (X, d), ideea generalizării noastre este aceea de a considera contracţii (de tip Edelstein) de la $X^m = \overset{m}{\underset{k=1}{\times}} X$ la X, în locul contracţiilor din X în el însuşi. Numim un astfel de obiect sistem iterativ de funcţii generalizat (prescurtat GIFS) sau, în cazul în care dorim să fim şi mai precişi, sistem iterativ de funcţii generalizat pe X de ordin m (prescurtat GmIFS).

În *Secţiunea II.2* amintim definiţiile şi unele fapte bine cunoscute privind contracţiile generalizate şi introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii generalizat care este o familie finită de contracţii (de tip Edelstein) $f_k : X^m \to X$, unde (X, d) este un spaţiu metric şi $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

În *Secţiunea II.3*, folosind unele teoreme de punct fix pentru contracţii (de tip Edelstein) din X^m în X, demonstrăm, în situaţia în care (X, d) este compact şi funcţiile f_k sunt contracţii (de tip Edelstein), existenţa şi unicitatea atractorului pentru un astfel de GIFS.

Secţiunea II.4 tratează cazul în care (X, d) este complet şi funcţiile f_k sunt contracţii Lipschitz. În acest cadru, demonstrăm existenţa şi unicitatea atractorului pentru un astfel de GIFS şi studiem proprietăţile sale (spre exemplu, furnizăm o margine superioară pentru distanţa Hausdorff-Pompeiu dintre atractorii a două astfel de sisteme iterative de funcţii generalizate, precum şi o margine superioară pentru distanţa Hausdorff-Pompeiu dintre atractorul unui astfel de sistem iterativ de funcţii generalizat şi o submulţime compactă a lui X).

În **Capitolul III** sunt prezentate contribuţiile autorului tezei privind generalizările noţiunii de măsură Hutchinson.

În *Secţiunea III.2* amintim definiţiile şi unele fapte bine cunoscute privind funcţiile Lipschitz, contracţiile generalizate, sistemele iterative de funcţii generalizate, metrica Monge-Kantorovich şi sistemele iterative de funcţii cu probabilităţi.

Măsura Hutchinson este măsura invariantă asociată unui sistem iterativ de funcţii cu probabilităţi. Dat un spaţiu metric (X, d), sistemele iterative de funcţii pe X de ordin 2 se obţin considerând contracţii din $X \times X$ în X, în locul contracţiilor din X în el însuşi. Urmând această idee de generalizare, introducem noţiunile de sistem iterativ de funcţii generalizat cu probabilităţi (prescurtat GIFSp) şi de sistem iterativ de funcţii generalizat cu probabilităţi depinzând de punct (prescurtat GIFSpdp).

În *Secţiunea III.3* demonstrăm existenţa şi unicitatea unui analog al măsurii Hutchinson asociată unui GIFSp. În plus dovedim că suportul unei astfel de măsuri este atractorul GIFSp-ului considerat şi construim un şir de măsuri care converg, în metrica Monge-Kantorovich, la aceasta.

În *Secţiunea III.4* prezentăm o condiţie suficientă pentru ca operatorul Markov asociat unui GIFSpdp să fie Lipschitz. De asemenea, demonstrăm, în anumite condiţii, existenţa şi unicitatea unui analog al măsurii Hutchinson asociată unui GIFSpdp. Arătăm că suportul unei astfel de măsuri este atractorul GIFSp-ului considerat, construim un şir de măsuri care converg, în metrica Monge-Kantorovich, la aceasta şi obţinem o estimare a vitezei de convergenţă.

Capitolul IV conţine contribuţiile autorului tezei la teoria sistemelor infinite iterative de funcţii (prescurtat IIFS) care sunt grupate în trei direcţii principale, anume: i) studiul spaţiului codurilor asociat unui IIFS; ii) unele legături între atractorul unui IIFS $\mathcal{S}$ şi atractorii sub-IFS-urilor lui $\mathcal{S}$; iii) caracterizări alternative ale sistemelor afine infinite iterative de funcţii care sunt hiperbolice.

În *Secţiunea IV.2* amintim definiţiile şi unele fapte bine cunoscute privind semimetrica Hausdorff-Pompeiu, sistemele infinite iterative de funcţii (pe scurt IIFS), spaţiul codurilor asociat unui IIFS, funcţiile de comparaţie, φ-contracţiile şi sistemele afine infinite iterative de funcţii. De asemenea introducem noţiunea de sistem afin infinit iterativ de funcţii (prescurtat AIFFS) pe un spaţiu Banach (care poate fi infinit dimensional) şi precizăm ce înseamnă că un astfel de sistem este hiperbolic, φ-hiperbolic, "point-fibered", "uniformly point-fibered", topologic contractiv şi strict topologic contractiv şi ce reprezintă atractorul său.

În *Secţiunea IV.3* prezentăm o generalizare a noţiunii de spaţiu al codurilor asociat unui IFS. Mai precis, definim noţiunea de spaţiu al codurilor asociat unui IIFS şi descriem relaţia dintre acesta şi atractorul IIFS-ului considerat. Construim o proiecţie canonică (care se dovedeşte a fi continuă) de la spaţiul codurilor asociat unui IIFS în atractorul acestuia şi prezentăm condiţii suficiente pentru surjectivitatea acesteia.

Secţiunea IV.4 este dedicată prezentării unor legături între atractorul unui IIFS $\mathcal{S}$ şi atractorii sub-IFS-urilor lui $\mathcal{S}$. Mai precis, dat un IIFS $\mathcal{S} = (X, (f_i)_{i\in I})$, prezentăm o condiţie suficientă asupra unei familii $(I_j)_{j\in L}$ de submulţimi ale lui I, pentru a avea loc egalitatea $\overline{\underset{j\in L}{\cup} A_{I_j}} = A$, unde A desemnează atractorul lui $\mathcal{S}$ şi A_{I_j} atractorul sub-IFS-ului $\mathcal{S}_{I_j} = (X, (f_i)_{i\in I_j})$ al lui $\mathcal{S}$. În plus, demonstrăm că, dat un cardinal infinit $\mathcal{A}$ şi un spaţiu metric complet (X, d), dacă atractorul unui IIFS $\mathcal{S} = (X, (f_i)_{i\in I})$ este de tip $\mathcal{A}$ (i.e. există o submulţime densă a sa de cardinal mai mic sau egal cu $\mathcal{A}$), atunci există un sub-IFS $\mathcal{S}_J = (X, (f_i)_{i\in J})$ al lui $\mathcal{S}$, cu proprietatea că $card(J) \leq \mathcal{A}$, astfel încât atractorii lui $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}_J$ coincid.

În *Secţiunea IV.5* se arată că, pentru un sistem afin infinit iterativ de funcţii $\mathcal{S} = ((X, \|.\|), (f_i)_{i \in I})$, următoarele afirmaţii sunt echivalente: 1. $\mathcal{S}$ este hiperbolic; 2. există o funcţie de comparaţie φ_0 astfel încât $\mathcal{S}$ este φ_0-hyperbolic; 3. $\mathcal{S}$ are atractor; 4. $\mathcal{S}$ este strict topologic contractiv; 5. $\mathcal{S}$ este "uniformly point-fibered". Acest rezultat generalizează un rezultat al matematicienilor R. Atkins, M. Barnsley, A. Vince şi D. C. Wilson care tratează cazul în care $(X, \|.\|) = (\mathbb{R}^m, \|.\|)$ şi I este finită.

S.L. Lipscomb a introdus spaţiul $L(A)$ iar J.C. Perry şi S.L. Lipscomb au arătat că acesta se poate scufunda în $l^2(A)$, înzestrând astfel copia lui $L(A)$ cu topologia lui $l^2(A)$. Perry a scufundat pe $L(A)$ în cubul lui Tihonov I^A şi a demonstrat că imaginea lui $L(A)$ prin această scufundare este o submulţime a simplexului standard Δ^A care este atât o submulţime a lui $l^2(A)$, cât şi a lui I^A. Vom nota cu ω^A copia lui $L(A)$ înzestrată topologia lui $l^2(A)$ şi cu ω_c^A copia lui $L(A)$ înzestrată cu topologia lui I^A. Perry a arătat că ω_c^A este atractorul unui IIFS format din transformări afine ale lui I^A şi a menţionat ca problemă deschisă prezentarea lui ω^A ca atractor al unui IFS format din transformări afine ale lui $l^2(A)$.

Capitolul V dă un răspuns întrebării prezentate anterior.

În *Secţiunea V.2* introducem spaţiul lui Lipscomb $L(A)$.

În *Secţiunea V.3* arătăm modul în care ω^A se prezintă ca atractor al unui IFS format din transformări afine ale lui $l^2(A)$.

Dată o mulţime infinită A şi $p \in [1, \infty)$, în *Secţiunea V.4*, folosind rezultatele din Secţiunea IV.3, arătăm că scufundarea lui $L(A)$ în $l^p(A)$, înzestrată cu topologia indusă de cea a lui $l^p(A)$, notată cu ω_p^A, este atractorul unui IFS format din transformări afine ale lui $l^p(A)$. În acest mod am generalizat rezultatul din secţiunea precedentă care oferea un răspuns pozitiv la problema ridicată de Perry.

În *Secţiunea V.5* arătăm că $\omega_p^A = \omega_q^A$ pentru orice $p, q \in [1, \infty)$ şi, prin furnizarea unei descrieri complete a şirurilor convergente din ω_p^A, demonstrăm că structura topologică a lui ω_p^A nu depinde de p.

Capitolul VI, care este şi ultimul, prezintă unele planuri de viitor privind cariera mea profesională şi ştiinţifică.

Sunt descrise următoarele aspecte:

a) *direcţiile de cercetare pe care plănuiesc să le urmăresc*, anume:

- pe termen scurt:

i) studiul unor noi aspecte privind relaţiile dintre atractori unui sistem infinit iterativ de funcţii, sub-atractorii acestuia şi mulţimile de tip $\mathcal{A}$;

ii) studiul unei întrebări ridicate de A. Kameyama privind existenţa unei metrici auto-similare pe o mulţime topologică auto-similară;

iii) obţinerea unor condiţii suficiente pentru "transformarea" (în sensul existenţei unei metrici echivalente) unei familii finite de funcţii continue în φ-contracţii.

- pe termen lung:

iv) măsuri vectoriale invariante.

b) *subiectele pe care doresc să le predau*, atrăgând astfel studenţii către studiul sistemelor iterative de funcţii.

c) o *nouă versiune a monografiei intitulate "Funcţii Lipschitz"* care apărut, în 2002, la Editura Academiei Române.

Ca o remarcă finală privind structura prezentei teze, menţionez că, deşi multe rezultate nu sunt însoţite de demonstraţii, în scopul unei mai bune ilustrări a ideilor, în unele situaţii am prezentat schiţe de demonstraţii (indicate prin `Proof`).